## GROUPE C

# MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

## PROBLÈME

*Les trois parties peuvent être traitées indépendamment*

On note $R[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels d'une variable réelle et $R_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $R[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. On identifiera un polynôme $P$ de $R[X]$ à la fonction réelle de variable réelle $x \to P(x)$ associée.

### Introduction

Soit $L : R[X] \to R$ une application linéaire. La donnée de L est équivalente à la donnée de la suite $\{u_n\}_{n \in N}$ définie par $u_n = L(x^n)$. On dit que $\{P_n\}_{n \in N}$ est une suite orthogonale de polynômes pour L (notée SOP) si :

*a.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in R[X]$ et degré $P_n = n$.

*b.* $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \neq m \Rightarrow L(P_n P_m) = 0$

*c.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $L(P_n^2) \neq 0$

Soit $\{P_n\}_{n \in N}$ une SOP pour L. Montrer que $\{P_0, ..., P_n\}$ est une base de $R_n[X]$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in R_{n-1}[X]$, $L(P_n P) = 0$.

En déduire que, si $\{P_n\}_{n \in N}$ et $\{Q_n\}_{n \in N}$ sont deux SOP pour L, il existe des constantes $\{c_n\}_{n \in N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = c_n P_n$.



### I

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions de R dans R, indéfiniment dérivables.

1. Soit $f$ l'élément de $\mathcal{C}$ défini par :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx$ sont convergentes. On note $L : R[X] \to R$ l'application linéaire associée à la suite $\{u_n\}_{n \in N}$.

2. On définit trois endomorphismes de $\mathcal{C}$ A, B, F par les formules suivantes : si $g \in \mathcal{C}$,

$$A\,g : x \longmapsto g''(x) - x\,g'(x)$$
$$B\,g : x \longmapsto g''(x) + x\,g'(x)$$
$$F\,g : x \longmapsto f(x)\,g(x).$$

On dit que $g$ est un vecteur propre de A (resp. B) associé à la valeur propre $\lambda \in R$ si $A\,g = \lambda\,g$ (resp. $B\,g = \lambda\,g$).

*a.* Montrer que F est une bijection de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. L'endomorphisme réciproque est noté $F^{-1}$.

*b.* Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_\lambda$ (resp. $\mathcal{B}_\lambda$) des vecteurs propres de A (resp. B) associés à la valeur propre $\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Montrer que la restriction de F à $\mathcal{A}_\lambda$ réalise une bijection de $\mathcal{A}_\lambda$ sur $\mathcal{B}_{\lambda-1}$.

*c.* Montrer que l'application $g \longmapsto g'$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ envoie $\mathcal{A}_\lambda$ (resp. $\mathcal{B}_\lambda$) dans $\mathcal{A}_{\lambda+1}$ (resp. $\mathcal{B}_{\lambda-1}$).

*d.* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $g_n$ de $\mathcal{C}$ défini par : $g_n(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$ est dans $\mathcal{B}_{-n-1}$.

*e.* Montrer que $P_n = F^{-1}(g_n)$ est dans $R[X] \cap \mathcal{A}_{-n}$. Calculer $P_0$ et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P'_{n+1} = -(n+1)\,P_n.$$

.../...

3. *a.* Montrer que, si $Q_1$ et $Q_2$ sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, on a la relation :

$$L(Q_1 \cdot AQ_2) = -L(Q'_1 Q'_2) = L(AQ_1 \cdot Q_2)$$

En déduire que $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ est une SOP pour L.

*b.* Calculer $L(P_n^2)$.

## II

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $g \in \mathcal{C}$, on définit :

$$\| g \|_\infty = \sup_{x \in [-1, +1]} | g(x) | .$$

Montrer que $\| g \|_\infty = \sup_{\theta \in [0, \pi]} | g(\cos \theta) |$.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(\theta) = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^n .$$

Calculer $J_n = \int_0^\pi f_n(\theta) \sin \theta \, d\theta$. En déduire l'inégalité :

$$I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f_n(\theta) \, d\theta \geqslant \frac{4}{n+1} .$$

On pose $F_n = \frac{f_n}{I_n}$. Montrer que :

$$\forall \delta, \quad 0 < \delta \leqslant \pi, \quad \sup_{\substack{\theta \in [-\pi, +\pi] \\ |\theta| > \delta}} F_n(\theta) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty .$$

2. Soit $g$ un élément de $\mathcal{C}$; on lui associe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$G_n(\theta) = \int_{-\pi}^{+\pi} g(\cos \theta') F_n(\theta - \theta') \, d\theta'$$

*a.* Montrer que $G_n$ est une fonction paire.



*b.* Montrer qu'il existe $(n+1)^2$ constantes $\{ a_{ij} \}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, telles que :

$$G_n(\theta) = \sum_{i+j \leqslant n} a_{ij} (\sin \theta)^i (\cos \theta)^j$$

*c.* Déduire de *a.* et *b.* qu'il existe une suite $\{ Q_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$G_n(\theta) = Q_n(\cos \theta) .$$

3. *a.* Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue de période $2\pi$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_t^{t+2\pi} h(x) \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} h(x) \, dx .$$

*b.* Déduire des questions précédentes que :

$$\| g - Q_n \|_\infty \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

(On admettra pour cette question que $g$ est uniformément continue, *i. e.* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $| g(x) - g(y) | \leqslant \varepsilon$ si $| x - y | \leqslant \eta$.)

## III

Soit $f$ une fonction positive continue sur $]-1, +1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $u_n = \int_{-1}^{+1} x^n f(x) \, dx$ convergent absolument, ce qui signifie que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{+1-\varepsilon} | x |^n f(x) \, dx$ existe. On définit alors $u_n$ par :

$$u_n = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{+1-\varepsilon} x^n f(x) \, dx .$$

On note $L : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application linéaire associée à la suite $u_n$.

.../...

1. Montrer que, si $g$ est dans $\mathcal{D}$, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} g(x) f(x)\, dx$ converge absolument. On pose alors :

$$L(g) = \int_{-1}^{+1} g(x) f(x)\, dx .$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\, g \in \mathcal{D}, \qquad |L(g)| \leqslant C \| g \|_\infty .$$

En remarquant que, si $(g, h)$ est dans $\mathcal{D}^2$, le trinôme $t \to L(g + th)^2$ est toujours positif, montrer que : $(L(gh))^2 \leqslant L(g^2)\, L(h^2)$.

2. On suppose qu'il existe une SOP $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour L et qu'elle vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $L(P_n^2) = 1$. Si $g$ est dans $\mathcal{C}$, on définit : $\lambda_n = L(P_n g)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$

Montrer que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad L((g - s_n) P) = 0 .$$

Soit $(\mu_0, \ldots, \mu_n) \neq (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. On pose :

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \mu_k P_k .$$

Montrer que $L\left((g - s_n)^2\right) < L\left((g - t_n)^2\right)$ et que $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \leqslant L(g^2)$.

3. Déduire des questions précédentes et de II.3.*b*. que $L\left((g - s_n)^2\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et que $L(g^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2$.





**4. Dans cette partie, on étudie l'exemple :**

$$f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

*a.* Montrer que les intégrales $\int_{-1}^{+1} x^n f(x)\, dx$ convergent absolument.

*b.* Montrer qu'il existe des polynômes $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tels que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\cos n\theta = Q_n(\cos \theta)$.

*c.* Montrer que $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une SOP pour L. Calculer $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$. Calculer $L(Q_n^2)$. On pose : $P_n = Q_n [L(Q_n^2)]^{-\frac{1}{2}}$.

*d.* En appliquant III.3. à la fonction $g(x) = \operatorname{Arccos} x$, calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ puis celle de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.